

EL INFINITO

¿Un viaje o un destino?

FRANCESC ROSSELL I PUJÓS

Shackleton
— b o o k s —

El infinito. ¿Un viaje o un destino?

© Francesc Rossell i Pujós, 2019

© de esta edición, Shackleton Books, S. L., 2024

Shackleton
— b o o k s —



@Shackletonbooks

shackletonbooks.com

Realización editorial: Bonalletra Alcompas, S. L.

Diseño de colección: Lookatcia

Diseño de cubierta: Lookatcia

Diseño: Kira Riera

Maquetación: reverté-aguilar

© Ilustraciones: Francesc Rossell i Pujós

© Fotografías: todas las imágenes de este volumen son de dominio público

Depósito legal: B 10683-2024

ISBN: 978-84-1361-324-6

Impreso por EGEDSA (España)



Reservados todos los derechos. Queda rigurosamente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento y su distribución mediante alquiler o préstamo públicos.

CONTENIDO

Prólogo	7
El infinito no existe más que en potencia. ¿O sí?	15
Infinito en potencia. El infinito es un viaje	69
Un viaje infinito	70
Un viaje con destino infinito	76
¿A qué velocidad viajamos?	82
El análisis matemático en sus orígenes	87
Infinitos reales. Los infinitos son todos iguales, aunque unos más que otros	99
Enfrentarse al <i>statu quo</i> : el infinito existe, y hay más de uno	101
Establecer la base teórica: los axiomas Z, ZF y ZFC	132
El infinito está en todas partes	165
Tomemos el infinito en perspectiva	166

Una superficie infinita que encierra un volumen finito	175
¿Existe el infinito físico?	180
Vivimos en un multiverso	191
A modo de conclusión...	203
Apéndices	207
Cálculos y demostraciones	209
1. El número $1/4$ pertenece al conjunto de Cantor	209
2. Cambios de base para números reales	213
3. El teorema de Cantor-Bernstein-Schröder	215
4. Los axiomas de especificación y del par en el sistema ZF	220
5. Cálculo de la superficie de un tronco cónico	222
Premios Nobel de física cuántica	227
Un cronograma de amigos y enemigos del concepto de infinito	229
Bibliografía recomendada	233

Prólogo

Cuidado: *spoilers*. El reciente blockbuster de ciencia ficción *Infinite* (2021) tiene este título porque su protagonista, Evan McCauley (interpretado por Mark Wahlberg), ha vivido miles de vidas sin ser plenamente consciente de ello... Sin embargo, matemáticamente hay una gran diferencia entre «miles» e «infinitas», con lo cual el título de la película no es precisamente acertado. Aunque, claro, todo esto depende de lo que se entienda por «infinito»: en este caso, algo *muy grande. Inmenso*.

En cualquier caso, para descubrir sus (infinitas) vidas anteriores y, de paso salvar a la humanidad (por si alguien tiene dudas: esta película no ganó un Oscar al mejor guion, aunque sí fue nominada a diversos premios a la peor película), McCauley deberá acordarse de algo muy importante; tan importante que lo lleva tatuado en el pecho: «Mira adentro». Y aquí sí que coinciden las matemáticas y el cine, porque para conocer el infinito es necesario adentrarse en él, conocer las vidas de aquellos que han reflexionado acerca del infinito, hasta lograr conocer la verdad. Por eso, si queremos salvar al mundo de

la destrucción, como Mark Wahlberg, debemos adentrarnos en el infinito.

Pero empecemos por el principio: ¿De qué hablamos cuando hablamos del infinito? ¿El infinito existe de verdad? Y así tenemos nuestra primera controversia, pues algunos dicen que sí, y otros dicen que no.

Los que dicen que sí han utilizado, a lo largo de la historia de la humanidad, muchos argumentos, pero el más directo es: «¿cómo no va a existir, si todo el mundo habla de él? ¡Pero si incluso en Corea hay una *boyband* que se llama así!». El infinito es, por así decirlo, el último paso que daría una persona que anduviese todos los caminos del mundo. No hay duda de que existe ese último metro, aunque nadie haya terminado nunca la (infinita) tarea de andar por todo el mundo. No hace falta que nadie se pase su vida entera (o sus infinitas vidas, si se trata del personaje de Evan McCauley) andando, para demostrar que este «último metro andado» existe, ¿verdad? Ese último metro es un metro igual que el primero, con la única diferencia que todavía nadie ha llegado allí, y nunca nadie va a lograrlo. Pues ocurre lo mismo con el infinito: si empiezas a contar de uno en uno, sabes que al cabo de un tiempo infinito llegarías al infinito; pero que no tengas tiempo de terminar nunca de contar no significa que el infinito no esté ahí, que no exista. Siempre se podría ir más allá y seguir contando, de igual forma que, una vez recorrido el último metro de todos los caminos de este mundo, se puede seguir andando por todos los caminos nuevos que se han ido construyendo desde que se empezó el paseo.

El infinito, por descontado, existe, y es un número exactamente igual que el número uno, o el número π .

Los que dicen que no, por su parte, también han esgrimido muchos argumentos a favor de su tesis a lo largo de la historia, pero el más directo es: ¿cómo va a existir en el mundo real, en el de verdad, algo que cuando le sumas una unidad se queda igual? No cabe en ninguna mente humana, en ningún mundo real, algo que se queda igual cuando les añades cosas. Podemos utilizar símbolos mágicos o tatuarnos un infinito en el brazo, si así lo deseamos, pero también podemos tatuarnos un elfo, o un Hobbit (aunque no se me ocurren muchas personas que quieran llevar a Frodo en el brazo), pero eso no significa que el infinito, los elfos o los Hobbits existan. Podemos imaginarnos algo muy grande, algo inmensamente grande, como la fortuna de Jeff Bezos (unos 200 000 millones de dólares, millón arriba, millón abajo) o el amor entre dos adolescentes alocados (o entre dos ancianos que llevan 70 años enamorados, que también los hay), pero siempre se puede sumar algo más a esas cantidades. Si nos ponemos filosóficos, podríamos decir que todo el amor que hay en el mundo forma un «amor infinito», y podríamos incluso darle un nombre a esa cantidad infinita de amor, por ejemplo, cuando se dice «Dios es el amor infinito». Pero eso no quita que, en realidad, Dios no forma parte de nuestro mundo real. Existen cosas tangibles, más «verdaderas», como el amor entre dos personas, pero ese «amor infinito» no es de este mundo, aunque nos empeñemos en profesar amor infinito a nuestras

parejas. Definitivamente, nuestro mundo real, nuestra mente, nuestra comprensión, no han sido creadas para incorporar un infinito real. Algunos matemáticos no son de este mundo, y por eso pueden pensar en un infinito que exista en su mundo, pero las personas que vivimos en un mundo real sabemos que el infinito no existe. Pero también hay otros matemáticos, que viven con los pies en el suelo, que saben que el infinito no es más que un artificio, una herramienta útil para realizar cálculos, pero que no refleja nada que sea real.

Ya ves, apreciado lector, que el infinito ha levantado controversias y, desde el minuto cero de la historia, la humanidad ha intentado dar respuesta a la pregunta sobre su existencia.

A lo largo de mi vida de estudiante de matemáticas (más o menos, desde los 3 años hasta la actualidad) me he encontrado en diversas ocasiones frente al infinito. Y siempre me ha asaltado esa misma pregunta. Quizás el símbolo ∞ sea la representación de un número, de una cantidad, como lo son, por ejemplo, los símbolos 1, $\sqrt{2}$, o π , o quizás no sea nada más que el producto de la imaginación excesiva de nuestra mente. En general, la respuesta dependía de la asignatura concreta que estaba estudiando y del profesor en particular que la impartía, y yo no prestaba demasiada atención a las inconsistencias derivadas de ir cambiando de opinión en función del momento. Pero de vez en cuando me asaltaba la duda, especialmente cuando alguno de los profesores nos retaba a ir «más allá» del temario propio de la asignatura y

buscar conexiones con otras asignaturas: el análisis y la lógica, el álgebra y la computación, la teoría de la medida y la física, etc. Un mundo maravilloso, en el que las cosas tenían sentido y carecían de él a partes iguales (al menos para nosotros, simples estudiantes ansiosos por aprobar la materia). Y a mí me fascinaba.

El infinito-número y el infinito-inalcanzable son dos formas de interpretar algo que se escapa de la mente finita (y, por tanto, limitada) de los humanos. Somos capaces de pensar y de escribir números muy grandes, pero el salto al infinito desde estos números grandes es, todavía, un salto demasiado grande para nuestros esquemas tradicionales. Aunque Buzz Lightyear sea tan poderoso que pueda saltar «hasta el infinito y más allá», un salto de ese calibre no es fácilmente alcanzable para los humanos ni para sus mentes.

Por fortuna, las ciencias avanzan y, hoy en día, la física nos proporciona una descripción precisa de lo que significa este salto necesario para pasar de números muy grandes al infinito: un salto *cuántico*. Este salto cuántico, como en la física, no se da una sola vez, sino que tiene lugar cuando se pasa, por ejemplo, del «infinito numerable» al «infinito incontable», y quizás incluso más allá...

En tanto que lenguaje de comunicación de ideas, las matemáticas utilizan a veces algún término polisémico, que puede generar confusión si no se presta atención al contexto. El *quid* de la cuestión, por tanto, no está en dilucidar si el símbolo ∞ representa una enteología inalcanzable o un número real (o sea un ente numérico, un

miembro de pleno derecho del club de los números), sino en utilizar la acepción del término que mejor se adapta al contexto en que nos movemos. Y, como todo lingüista sabe, dominar el lenguaje es una tarea que requiere paciencia, tiempo y, especialmente, mucha práctica. De este modo, según el momento y según las circunstancias, podremos utilizar de forma experta el infinito, mirándolo como un número real o simplemente como una herramienta de cálculo.

Espero que el presente escrito te anime a profundizar en la práctica del bello arte de las matemáticas, a través de un viaje hacia el infinito que, quizás, empiece hoy mismo. Vamos a introducirnos en este mundo siguiendo el camino que han recorrido algunos matemáticos ilustres a lo largo de la historia.

La historia nos permite entender las terribles dificultades padecidas en la comprensión de los conceptos de límite, por ejemplo, o de continuidad, ambos conceptos ligados al infinito «potencial», e incluso preguntarnos sobre los cimientos mismos de las matemáticas al explorar el infinito «real». Y es que la historia del infinito abarca prácticamente desde el inicio de las matemáticas (cuando el encontronazo con el infinito generó un rechazo frontal a la idea, como también lo generó en su momento la idea de aceptar que el cero es un número) hasta finales del siglo XIX e inicios del siglo XX con la sistematización y definición del infinito en cuanto a realidad, e incluso hasta nuestros días.

Y, sobre todo, espero que mientras recorremos juntos este viaje veas nuevas posibilidades, nuevos caminos que todavía están por recorrer en el mundo de las matemáticas. ¿Te animas?



El infinito no existe más que en potencia. ¿O sí?

«Ninguna pregunta ha movido tan profundamente el espíritu del hombre, ninguna idea ha estimulado tan fructuosamente su intelecto, ningún concepto tiene una mayor necesidad de aclaración que el del infinito».

DAVID HILBERT (1862-1943).

En el estudio científico en general, y matemático en particular, algunos investigadores logran vivir grandes días. Son días en que se dan cuenta de que acaban de descubrir algo nuevo o han conseguido demostrar lo que hasta entonces era una mera conjetura; o sencillamente el día en que culmina todo un proceso de investigación.

Esos grandes días son los que marcan el avance de la ciencia.

También ha habido días en la historia de las matemáticas en los que nada parece tener sentido, las investigaciones llegan a un punto muerto o, simplemente, el investigador se encuentra desbordado y necesita parar. Esos días no se conciben como *grandes*, sino todo lo contrario, aunque muchas veces son la semilla de nuevas líneas de investigación, el inicio de algo mucho mejor. Las jornadas que no son *grandes días* también hacen avanzar las matemáticas.

La exploración del infinito empieza durante un *gran día*.

§

Hoy es un gran día para **Anaximandro** (610 a. C. - 545 a. C.), un joven y entusiasta estudiante de Mileto. Su maestro, **Tales** (623 a. C. - 546 a. C.), acaba de elogiarle por su explicación acerca de cómo es el mundo y su entorno. La tesis de Anaximandro establece, al contrario de todo lo que se ha dicho y escrito a lo largo de la historia, que la Tierra no se sustenta sobre elefantes, ni sobre pilares, ni nada parecido. La Tierra, según Anaximandro, es un disco de un grosor relativamente pequeño que flota en el espacio. Aire por arriba, aire debajo, aire a su alrededor.

Anaximandro tenía ciertas dudas sobre cómo reaccionaría su maestro ante tal teoría. Si bien es cierto que, según esta nueva visión, es más fácil entender por qué

El infinito no existe más que en potencia. ¿O sí?

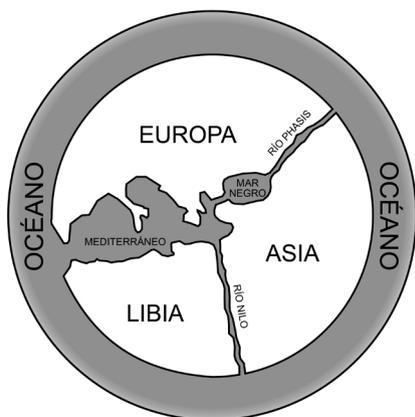


Figura 1. Vista aérea de la Tierra según Anaximandro.

el Sol y otras estrellas *desaparecen* para *aparecer* de nuevo al cabo de unas horas (simplemente, giran alrededor de la Tierra en un movimiento circular, por lo que no las vemos cuando pasan por debajo de esta), en todos los textos que ha consultado, procedentes incluso de lugares tan lejanos como Egipto, la Tierra se describe *apoyada* sobre algo. Anaximandro empezó a dudar de estas teorías cuando encontró una nueva que permite explicar los movimientos del Sol y por qué lo vemos durante el día y dejamos de verlo durante la noche. Las alabanzas de su maestro le han causado una gran satisfacción y le animan a seguir en su idea de cuestionarse todo lo que a su alrededor se da por sentado. Pero, claro, una cosa es poner en duda unas teorías formuladas siglos atrás y otra muy distinta es poner en cuestión, directamente, las enseñanzas de su maestro. ¿Quién osaría dudar de las teorías del gran Tales?

Anaximandro, quizá.

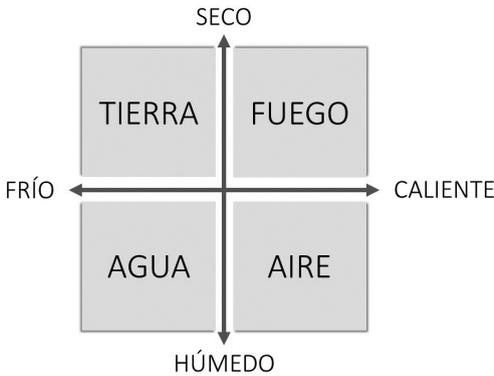


Figura 2. Los cuatro elementos constitutivos de la materia junto con sus propiedades.

En su búsqueda para conocer de qué están hechas las cosas, cuál es la materia prima que constituye todo lo que vemos a nuestro alrededor (el *arjé* o *ἀρχή*), Tales postuló que se trata del agua. Todo está constituido por agua, el espíritu vivo, inteligente, que guía en definitiva los procesos de nacimiento, transformación y muerte de todas las cosas: personas, animales, plantas... todos necesitamos agua para nacer y crecer, y no disponer de ella nos lleva a la muerte.

Anaximandro tiene una objeción importante a lo que explica Tales: como está claro que el mundo está constituido de cuatro elementos —aire, agua, fuego y tierra (no hay ninguna duda de esto, por descontado)—, no es posible, por tanto, que un solo elemento de estos cuatro —el agua— pueda ser constitutivo de los otros tres; basta con tener en cuenta que el agua es un elemento húmedo y frío, mientras que el fuego es caliente, como el aire, y la tierra es seca.

Tales debe de estar equivocado. El *arjé* no es el agua, como tampoco lo podría ser ninguno de los otros tres elementos constitutivos de la materia. Lo que explica todo, lo que constituye todo, no puede ser un subconjunto de este todo. En particular, no puede ser que el *arjé* sea algo definido, finito, por cuanto constituye la materia esencial de todo lo que ha habido y habrá, en este mundo y más allá. El *arjé* tiene que ser, necesariamente, infinito. O, en griego, *ápeiron* (ἄπειρον). Ninguno de los cuatro elementos principales podría ser el *arjé*, porque, al fin y al cabo, se trata de sustancias limitadas, finitas, mientras que el *arjé* tiene que ser infinito, en cuanto que fuente de todo lo creado y lo que está por crear.

En cualquier caso, sí que existe una relación entre los cuatro elementos y el *ápeiron*, según Anaximandro: el *ápeiron* es, precisamente, la combinación de los cuatro elementos, que se mezclan para formar una sustancia indefinida, nueva, que está siempre en movimiento. Y, con el movimiento, el *ápeiron* se separa en las sustancias simples, es decir, los cuatro elementos, rigiendo de este modo los ciclos de creación, transformación y también de destrucción, pues todo lo que muere regresa al *ápeiron*.

El *ápeiron* es infinito. De hecho, es *el* infinito. Y existe en la realidad, rige los procesos naturales, aunque no seamos capaces de verlo. Es como un dios. Aunque los dioses, que también son sustancias, están constituidos a su vez por el *ápeiron*. El *ápeiron* es, por tanto, una especie de dios de dioses, más poderoso que Zeus. Todos somos

parte del *ápeiron*, del infinito, que está en nosotros y nosotros en él (como la fuerza en *Star Wars*).

Cuanto más piensa en ello, más convencido está Anaximandro de dos cosas: la primera es que hoy es un gran día para él porque ha recibido las alabanzas de su maestro, el gran Tales de Mileto. Y la segunda es que hoy no va a ser el día en que Anaximandro exponga su visión del *arjé* a su maestro. No se arriesgará a estropear un gran día. Quizá mañana.

§

Hoy es un gran día para **Aristóteles** (384 a. C. - 322 a. C.): regresa a Atenas después de seis años como tutor de Alejandro Magno, el hijo del rey Filipo II de Macedonia. Seis años atrás, Alejandro era un joven con mucho futuro, destinado a gobernar un gran imperio, y Aristóteles aceptó el encargo, con 41 años ya, porque vio en él una última oportunidad para organizar un gran centro de conocimiento donde seguir investigando y expandiendo el saber hacia todos los rincones del mundo.

Siendo tutor de la corte ha podido formar una buena biblioteca, en la que ha ido recopilando el conocimiento del mundo actual, aunque sus quehaceres le han restado mucho tiempo para escribir acerca de sus investigaciones y pensamientos. Ahora ha llegado el momento de cambiar, con 47 años ya, y regresar a Atenas, seis años después de marchar a Macedonia, y diez tras abandonar la Academia de Platón.